utilidad práctica tan definida, no es dable evitar esto; pero tan pronto como sea posible debe exponer el maestro las razones de las reglas, empleando para ello los medios que más fácilmente comprenda la mentalidad infantil. En geometría, en vez del tedioso aparato con que se logran pruebas falsas de perogrulladas obvias,—que eso es el comienzo de Euclides,—se le debe permitir al estudiante que asuma la verdad de cuanto es obvio, y se le debe instruir en las demostraciones de teoremas que sean sorprendentes a la vez que fáciles de comprobar mediante dibujos: Teoremas como aquellos en los que se demuestra que tres o más líneas se juntan en un punto. Así se fomenta la fe; se ve que el razonamiento puede llevar a conclusiones que por sorprendentes que sean, la realidad visible puede comprobar; y así la desconfianza instintiva de cuanto es abstracto o racional, se vence gradualmente. Cuando los teoremas son difíciles, se les debe enseñar primero como ejercicios de dibujo geométrico, hasta que la figura le sea enteramente familiar al estudiante; entonces será un paso agradable aprender las conexiones lógicas de las varias rectas o curvas que ocurran. Es deseable, también, que la figura que ilustre un teorema se la dibuje en todos los casos y formas posibles, para que las relaciones abstractas de que se ocupa la geometría surjan por si mismas como residuo de similitud en medio a tan grande diversidad aparente. De este modo las demostraciones abstractas formarán sólo una pequeña parte de la instrucción, y deben darse cuando el estudiante, ya familiarizado por medio de ilustraciones concretas, tenga el convencimiento de que encarnan verdades que la realidad visible comprueba. En tan temprana etapa de la enseñanza las pruebas no deben darse con plenitud pedante; los métodos definidamente falsos, como el de la superposición, deben excluirse rígidamente desde el principio; pero en aquellos casos en los que, sin tales métodos, la prueba sería muy difícil, debe hacerse aceptable el resultado por medio de argumentos y de ilustraciones que contrasten explícitamente con las demostraciones.

En el comienzo del álgebra, hasta el niño más inteligente halla, por regla general, dificultad enorme. El empleo de letras es un misterio que no parece tener otro fin que el de mixtificar. Es casi imposible, al principio, no pensar que cada letra representa un número dado, un número que el maestro sabe y que sabríamos si nos lo dijese. El caso es que en el álgebra se le enseña a la mente a considerar por vez primera verdades generales, verdades que lo son no sólo con respecto de una u otra cosa dada, sino que de cualquiera de las que forman todo un grupo de cosas. En la facultad de comprender y de descubrir tales verdades reside el poder del intelecto sobre cuanto es real o posible; y la habilidad para dominar lo general como general, que no como conjunto de casos particulares, es uno de los dones que la educación en la matemática debe de conceder. Pero, generalmente, ¡de qué manera tan poco satisfactoria, tan poco inteligente, puede el maestro de álgebra explicar el abismo que la divide de la aritmética; y en sus esfuerzos por entender, cómo va el estudiante dando tropezones sin recibir más que la más ligera ayuda! Porque generalmente se sigue en el álgebra el método que se ha adoptado para la enseñanza de la aritmética: Se dan ciertas reglas sin explicar su fundamento; el estudiante las aprende ciegamente, y con el tiempo, cuando ya puede obtener las respuestas que el maestro quiere, se siente como si hubiera dominado las dificultades de la asignatura. De la comprensión interior de los procedimientos empleados, lo más probable es que casi no haya adquirido nada.

Cuando se ha aprendido álgebra, todo va como en rieles y sobre ruedas hasta que llegamos a aquellos estudios en los que se emplea la noción de la infinidad,—en el cálculo infinitesimal y en todas las altas matemáticas. La solución de las dificultades que anteriormente rodeaban al infinito matemático es probablemente el mayor triunfo de que puede enorgullecerse nuestra época. Desde los comienzos del pensamineto griego se han conocido estas dificultades; en cada época los intelectos más sutiles se han esforzado, en vano, por responder las aparentemente incontestables preguntas que hizo Zenón eleata. Hasta que, por fin, George Cantor ha hallado la respuesta, y ha conquistado así, para el intelecto, una provincia nueva y vasta donde reinaran el Caos y la antigua Noche. Asumíase como cosa evidente de por sí, hasta que Dedekind estableció lo contrario, que si, de una colección de cosas, quitamos algunas, el número de las restantes sería menor que el que había antes de hacer esa operación de resta. Esta asunción, sin embargo, es cierta sólo con referencia a colecciones o grupos finitos; y su negación, en lo tocante a lo infinito, se ha demostrado que quita todas las dificultades que antaño dejaban perpleja a la razón humana a este respecto, y hace posible la creación de una ciencia exacta del infinito. Este estupendo descubrimiento debe revolucionar la enseñanza de la alta matemática; de por sí ha enaltecido grandemente el valor educativo de todos los estudios matemáticos, y nos ha facilitado por fin los medios para que tratemos con precisión lógica muchos estudios que, hasta recientemente, estaban envueltos en falsedad y oscurana. Pero a quienes se les educó a la manera antigua, la nueva labor les parece aplastantemente difícil, abstrusa, y oscura; y debe confesarse que su descubridor él mismo, como es el caso tan amenudo, apenas si ha salido de entre las nieblas que la luz de su intelecto está dispersando. Pero inherentemente, la nueva doctrina del infinito le ha facilitado a toda mentalidad cándida e investigadora, la maestría de la alta matemática; porque antaño era necesario aprender, por un largo procedimiento de sofistiquería, a aceptar argumentos que, a primera vista, correctamente juzgamos confusos y erróneos. De manera que, lejos de producir una impertérrita fe en la razón, una atrevida actitud de rechazo de cuanto no se ciñe a los requisitos más estrictos de la lógica, la enseñanza de las matemáticas, durante los dos últimos siglos, impulsó la creencia de que muchas cosas que una investigación rígida rechazaría por falsas, había sin embargo que aceptarlas porque *resultaban* en lo que los matemáticos llaman "la práctica". Así, donde la razón ella sola debió sentarse en trono absoluto, se permitió que alzara cabeza y obtuviera mando un espíritu tímido y convenienciero, o bien una fe sacerdotal en misterios ininteligibles para los profanos. Ya es tiempo de barrer con eso: Enséñese de una vez a quienes desean penetrar en el arcano de la matemática, la teoría verdadera en toda su pureza lógica y en la concatenación establecida por la esencia misma de las entidades de que se trate.

Si consideramos la matemática como fin en sí misma en vez de como una disciplina técnica para los ingenieros, es muy deseable guardar la pureza y lo estricto de su razonamiento. Por consiguiente, a aquellos que han logrado una suficiente familiaridad con sus partes más fáciles, debe hacérseles retroceder, de las proposiciones a las que han dado su asentimiento, hacia principios más y más fundamentales, de los cuales puedan deducirse las que habían parecido premisas anteriormente. Habrá que enseñarles lo que la teoría de la infinidad ilustra con claridad: Que muchas proposiciones que para la mentalidad ineducada parecen evidentes en sí, resultan falsas, cuando las sometemos a un escrutinio más severo. Así se les guiará a una investigación escéptica de los primeros principios, a un examen de las bases sobre las que está fundado el edificio todo del razonamiento, o, para emplear una metáfora más adecuada, al gran tronco del que brotaron las extendidas ramas. En llegando a esta etapa, es bueno estudiar de nuevo las partes elementales de la matemática, no para sólo preguntar si es cierta o no una proposición dada, sino para también investigar cómo tal proposición crece de los principios centrales de la lógica. En nuestra época ya nos es dado resolver estos problemas con una seguridad y una precisión que anteriormente eran del todo imposibles; y en el engranaje del razonamiento que la solución de esos problemas requiere, por fin se muestra la unidad de todos los estudios matemáticos.

En la gran mayoría de los textos para el estudio de la matemática hay una falta total de unidad metodológica, y de desarrollo sistemático de un tema central. Se emplean medios cualesquiera, con tal que parezcan los más inteligibles, para probar proposiciones de diversa índole, y se dedica demasiado espacio a meras curiosidades que de modo ninguno contribuyen al argumento principal. Pero en las más grandes obras de matemática, se siente la unidad y la inevitabilidad como en el desarrollo de un drama: En las premisas se propone a la consideración un problema, y en cada paso que se da hacia su resolución se avanza inequívocamente hasta llegar al dominio de su naturaleza. El amor del sistema, el amor de la interconexión, que es quizás la esencia más honda del impuso intelectual, puede hallar, como en ninguna otra esfera, holgura de acción en la matemática. Al estudiante a quien anima este impulso no debe atontársele con un ejército de ejemplos faltos de significación ni debe distraérsele ni descarriársele con rarezas divertidas; se le debe alentar, más bien, a fijarse en principios centrales, a familiarizarse con la estructura de varios problemas que le sean presentados, a conducirse con soltura entre los pasos de las más importantes deducciones. De este modo se cultiva un buen tono mental, a la atención selectiva se la educa a fijarse de preferencia en lo que es de peso y de esencial valor.

Cuando se contemplan los estudios separados en que se divide la matemática cada uno como un todo lógico, como un desarrollo o brote natural de las proposiciones que constituyen sus principios, el estudiante podrá comprender la ciencia fundamental que unifica y sistematiza el todo del razonamiento deductivo. Esta ciencia es la Lógica Simbólica, estudio que, aún cuando debe su incepción a Aristóteles, es sin embargo, en la mayor amplitud de su desarrollo, producto, casi por entero, del siglo diecinueve que en el nuestro sigue creciendo con asombrosa rapidez. El verdadero método de descubrimiento en la Lógica Simbólica, y quizás el método mejor para iniciar en su estudio a los estudiantes ya conocedores de las otras ramas de la matemática, es el análisis de ejemplos efectivos de razonamientos deductivos con la mira de descubrir los principios empleados. Estos principios, en su mayor parte, están arraigados tan hondamente en nuestros instintos de raciocinio, que se les emplea de manera perfectamente inconsciente, y se les puede sacar a la luz sólo mediante grandes y pacientes esfuerzos. Pero, cuando por fin los hemos descubierto, vemos que son un corto número, y que constituyen la base única de cuanto hay en la matemática pura. El descubrimiento de que toda la matemática surge inevitablemente de una exigua colección de leyes fundamentales, realza inconmensurablemente la belleza intelectual del todo; a quienes se han sentido atormentados por la naturaleza fragmentaria e incompleta de casi todos los encadenamientos de la deducción, este descubrimiento les llega con la fuerza todadominante de una revelación; como un palacio que emerge de entre las neblinas del otoño al ascender el viajero una colina de Italia, así los majestuosos pisos del edificio de la matemática aparecen en su debido orden y en su justa proporción, con una nueva perfección visible en cada parte.

Hasta adquirir la Lógica Simbólica su desarrollo actual, los principios sobre los que descansa la matemática se creía que eran filosóficos, y descubribles sólo por los métodos inciertos e improgresivos empleados por los filósofos anteriores a nuestros días. Mientras perduró esta creencia, la matemática no parecía autónoma sino dependiente de un estudio que poseía métodos propios enteramente distintos de los suyos. Además, puesto que la naturaleza de los postulados de que se deducen la aritmética, el análisis y la geometría, estaba envuelta en las oscuridades tradicionales de las discusiones metafísicas, el edificio construido sobre tan dudoso fundamento comenzaba a juz-