Los números complejos, los sistemas de numeración y las progresiones geométricas

[Del autor y en carta: En alguna ocasión, su revista publicóme otro artículo que, intitulado «Generalidad de ciertas reglas o fórmulas matemáticas (I)», hacía ver la posibilidad de simplificar la Geometría clásica hasta reducirla a unas pocas verdades fundamentales, que llamamos Teoremas, de las que nacería el resto de dichas verdades, que serían, por lo tanto, corolarios de éstas; ahora, con el que le adjunto, se pone de relieve que esa idea de reducir la Geometría a unas pocas verdades capitales es aplicable también a la Aritmética, y que, al decir Aritmética, se comprende la Aritmética Universal o Algebra, también].

En octubre de 1920, siendo estudiante en la recordada Escuela Normal de Costa Rica, en Heredia, escribí un artículo, aún inédito, intitulado «Los números complejos y los sistemas de númeración» y que, con ligeras reformas, dice:

«Hay una analogía tan grande entre la teoría de los números complejos y la de los sistemas de numeración, que es extraño pensar que quien posea aquélla no llegue, con una extrema facilidad, a poseer ésta; la numeración y las operaciones fundamentales en un sistema de numeración cualquiera, pueden considerarse como la escritura y las operaciones fundamentales con una clase de números complejos, análogos a los decimales, es decir, en que una unidad de cualquier orden se forme siempre de un mismo número de unidades del orden inmediato inferior; y ojalá ese número sea el mismo que sirve de base al sistema de numeración: por ejemplo, el sistema duodecimal (de base 12) se facilitaría con el estudio de las unidades, docenas, gruesas y gruesones en los complejos; el sistema cuya base sea 60 se facilitará con el estudio de los segundos, minutos, grados y sextas partes de la circunferencia; el que tenga por base a 100, con los milímetros cuadrados, centímetros cuadrados, decímetros cuadrados, metros cuadrados, etc. etc.

Veamos el sistema duodecimal ayudándonos de la unidad, la docena, la gruesa y el gruesón; ante todo convengamos en llamar con *a* y *b* los números 10 y 11 respectivamente y veamos varias cuestiones:

1ª *Escribamos en el sistema duodecimal el número 8507 escrito en el sistema decimal.* ¿Cómo plantearíamos esta cuestión para resolverla por medio de complejos? Así: ¿en 8507 unidades cuántos gruesones, gruesas, docenas y unidades hay? Bastaría hacer divisiones por 12 que quienes conocen los sistemas de numeración, saben como se hacen, para saber que en dicha cantidad hay 4 gruesones, 11 gruesas y 11 unidades y se escribe 4 *b* o *b*.

2ª *Escribir en el sistema decimal el número 8 a b 3 escrito en el duodecimal.* Se ve más fácil enunciándolo así: ¿cuántas unidades hay en 8 gruesones, 10 gruesas (a=10), 11 docenas (b=11) y 3 unidades? Es tan sencillo esto que no pierdo tiempo explicando esas trivialidades para seguir adelante.

3ª *¿Cuánto suman los números a 5 b y 3 a 9 del sistema duodecimal?* Podríamos, para mejor claridad, decir: ¿cuántos gruesones, gruesas, docenas y unidades hay en 10 gruesas (a = 10), 5 docenas y 11 unidades (b = 11) y 3 gruesas, 10 docenas (a = 10) y 9 unidades? Es decir que no plantearíamos:

a	5	b	+
3	a	9	=
.	.	.	

sino

10 gruesas,		5 docenas y		11 unidades		+
3	»	10	»	9	»	=
13 gruesas		15 docenas y		20 unidades		

o sea: 1 gruesón, 2 gruesas, 4 docenas y 8 unidades; ahora sí veríamos que:

	a	5	b	+
	3	a	9	=
1	2	4	8	

ya que en el sistema duodecimal 1248 quiere decir 1 gruesón, 2 gruesas, 4 docenas y 8 unidades.

4ª *¿Qué diferencia hay entre los números 8 a b a y 5 b 7 b escritos en el sistema duodecimal?* O, de otro modo, ¿qué diferencia hay entre 8 gruesones, 10 gruesas (a=10), 11 docenas (b=11), 10 unidades (a=10) y 5 gruesones, 11 gruesas, (b=11), 7 docenas y 11 unidades (b=11)? Podemos plantear de los dos modos siguientes:

8	a	b	a	—
5	b	7	b	=
.	.	.	.	

y

8 gruesones,		10 gruesas,		11 Doc.		y 10 Unds.	
5	»	11	»	7	»	11	»

Por demás está efectuar la diferencia que es bien sencilla (resta, de complejos) en este último caso.

Con estas cuestiones bastará para hacer comprender qué auxilio más poderoso prestan los números complejos a la teoría de los sistemas de numeración; pero como en el sistema duodecimal de complejos, por ejemplo, no llegamos nada más que a gruesones, parece que no podríamos ayudarnos de éstos para explicar la teoría de los sistemas de numeración cuando las cantidades fuesen muy grandes porque no hay órdenes superiores a los gruesones [1] que sigan aumentando de 12 en 12; este inconveniente se podrá subsanar inventándo nuevos órdenes que podríamos llamar docenas de gruesones, gruesas de gruesones, gruesones de gruesones, etc., o con nombres especiales y así nos sería facilísimo trabajar en el sistema de numeración duodecimal; nuestro sistema de numeración va paralelo con el sistema métrico décimal para longitudes; podríamos suponer este sistema métrico entre los complejos si suponemos que el sistema de numeración nuestro no es el decimal y con eso la idea de la relación entre las teorías de los sistemas de numeración y de los números complejos se ve más general».

Pero ahora hace días he venido pensando que se pueden compaginar los complejos y los sistemas de numeración con las progresiones geométricas, si no totalmente, al menos en parte; en el artículo trascrito se deja ver la semejanza entre los sistemas de numeración y los complejos; hagamos ver la semejanza de estas teorías con la de progresiones geométricas: bastaría con comparar esta última con alguna de las primeras; sea con los sistemas de numeración y, para no perder tiempo, consideremos la progresión geométrica siguiente:

÷÷ 3 36 432 5184 etc.

cuya razón es 12 y cuyo primer término es 3. Yo observo que la suma de esos cuatro términos sería, escrita en el sistema duodecimal, 3333, puesto que

3 = 3 veces		1 = 3 unidades	
36 = 3	»	12 = 3 docenas	
432 = 3	»	144 = 3 gruesas	
5184 = 3	»	1728 = 3 gruesones	

y que 3 unidades, 3 docenas, 3 gruesas y 3 gruesones en el mencionado sistema se escriben 3333 unidades. ahora bien: sabemos que en toda progresión geométrica un término cualquiera es igual al primero (3) multiplicado por la razón (12) elevada a una potencia expresada por el número de términos que le preceden: en el caso de 432 debe ser igual a $3 \times 12^2 = 3 \times 12 \times 12 = 3 \times 144 = 3$ gruesas, que en el sistema duodecimal se escribe 300; en el caso de 5184 debe ser igual a $3 \times 12^3 = 3 \times 12 \times 12 \times 12 = 3 \times 1728 = 3$ gruesones, que se escriben 3000 en el sistema de que nos ocupamos; los términos 3 y 36 quedan, respectivamente

(1) En realidad ignoramos si hay órdenes más allá de los gruesones.